数理解析研究所講究録
546巻 1985年 24-50

$Sp(2,\mathbb{R})$ と $Sp(2)$ の保型形式の次元の比較

伊吹山 知義（九大養） 橋本喜一朗（早大理工）
(Tomoyoshi Ibukiyama) (Ki-ichiro Hashimoto)

一般に G を $\mathbb{Q}$ 上の split 代数群、G' を G の inner twist とする。G が reductive なら、Langlands 予想により、G_A と G'_A 上の保型形式の間に、L 函数を保つような対応が期待される。このような予想の動機の主要な部分は勿論、Eichler による、SL_2 と $SU(2)$ の比較に関する一連の仕事であろうが、一方で Gauss-Bonnet の定理や、Hirzebruch proportionality、あるいは実表現論における character relation 等もまた視野にはいっていたと思われる。実際、伊原康隆先生は、$Sp(2,\mathbb{R})$ と $Sp(2)$ の表現の character relation を得て（未発表）Langlands に先だって、この両者の関係を問題としている。最も一般の保型表現についてこのような問題を取りあつかおうとすれば、なすべきことは非常に多い一方で、我々の知識はかなり限られたものでしかない。一見しただけでは次のようなステップがもっともらしく見えるかも知れない：まず local な表現を細かく分類して Weil 群の表現との対応をつけて、これをうまく global につなげて、対応を証明する？ しかし、歴史は決してこのように進んではいないし、また見た目程もっとも

らしいステップでもないようである。たとえば、GL(3)の local theory をやる場合にも global な trace formula を使用しているというように。表現一般を取りあつかおうとするLanglands流の壮大な試みは、たとえばGL_nの時にはかなりの進歩があるようであるが、我々はひとまず表現一般はおいて、古典的な保型形式できちんと解釈できる場合で考えてみたい。そしてどの程度もっともらしい予想が述べられるかも明確にしてみたい。直接の根拠としては $Sp(2,\mathbb{R})$ と $Sp(2)$ の次元の比較定理があげられる。

§1. Main Term

G_v, G'_v を G, G' の v-adic completion とする。今素数 p を一つ固定して、$v \neq p, \infty$ なら $G_v \cong G'_v$ と仮定する。また $v \neq p, \infty$ に対して、何らかの意味で standard な極大コンパクト部分群 $U_v \subset G_v \cong G'_v$ を指定しておく。考えている保型形式の所属する群を決めるために $U = G_\infty U_p \prod_{v \neq p,\infty} U_v$, $U' = G'_\infty U'_p \prod_{v \neq p,\infty} U_v$ とおいてみよう。ここで U_p, U'_p は G_p, G'_p のコンパクト部分群であり、この決め方がまず問題となる。

（例1） $G = GL_2(\mathbb{Q})$ とする。今 D を判別式 p の $\mathbb{Q}$ 上$\overbrace{\text{の}}^{\text{定符号}}$四元数環とすると $G' = D^\times$ が G の1つの $\mathbb{Q}$-form を与える。

$v \neq p, \infty$ なら $G_v \cong G'_v \cong GL_2(\mathbb{Q}_v)$ である。$U_v = GL_2(\mathbb{Z}_v)$ とおこう。さて、Eichler による古典的な場合では、

$$U_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_p) \ ; \ c \equiv 0 \mod. p \right\}$$

また、$\mathcal{O}$ を D の極大整数環の1つとすると、

$$U'_p = \mathcal{O}_p^\times \qquad (\mathcal{O}_p \text{ は } \mathcal{O} \text{ の p-adic completion})$$

とおくと U と U' の保型形式の間によい対応があった。ここで G_A 上の保型形式は、通常の言葉では、複素上半平面上の重さ k の cusp form で $\Gamma_0(p)$ に属するもの。G'_A 上の保型形式はある種の4変数調和多項式である。($k-2$ 次斉次)
前者を $S_k(\Gamma_0(p))$ 後者を $\mathfrak{M}_{k-2}(U')$ と書こう。さてここで大切なことは、$S_k(\Gamma_0(p))$ の元のうちで、$\{f(z), f(pz) ; f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))\}$ ではられる空間に属する元は old form と呼ばれ、対応の対象から除外されるべきだったことである。この直交補空間 ($S_k(\Gamma_0(p))$ 内での) を new form と呼んでいた。これを $S_k^\circ(\Gamma_0(p))$ と書くと、

定理 (Eichler)

$S_k^\circ(\Gamma_0(p))$ と $\mathfrak{M}_{k-2}(U')$ は ($k \geqq 4$ で)
Hecke algebra の作用をこめて同型である。

この定理は勿論 trace formula により証明されるが、その前に

両者の次元を考えてみる。共にkの1次式であるが、その係数は、たとえば$S_k(\Gamma_0(p))$については、適当なmeasureによる$\mathfrak{H}/\Gamma_0(p)$の体積（$\mathfrak{H}$は1次元複素上半平面）である。これは、V-manifoldに対するGauss-Bonnetの定理を考えればわかるし、また、Selbergのtrace formulaから考えてもわかることである。（ある意味で、前者の1つの一般化が後者であるというような見方もできなくもないであろう。）さて、この係数は今の場合、$S_k(\Gamma_0(p))$で$c(p+1)$, $m_{k-2}(U')$で$c(p-1)$（ここでcは共通の定数）であり、$2c$分のズレはold formより説明される。すなわち、

$$\mathrm{vol}(\mathfrak{H}/\Gamma_0(p)) = \mathrm{vol}(\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Z})) \times [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(p)]$$
$$= (p+1)\,\mathrm{vol}(\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Z}))$$

であるから、$S_k^0(\Gamma_0(p))$に対しては、

$$\{(p+1)-2\}\,\mathrm{vol}(\mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Z}))$$ となるのである。

これにより両者の"main term"はたしかに一致する。このようなよい一致は一般にはどうなるのであろうか？これを考えてみよう。

（例2） C_2型を考える。

$$G = GSp(2,\mathbb{Q}) = \{ g \in M_4(\mathbb{Q}) \ ; \ gJ\,{}^tg = n(g)J,\ n(g) \in \mathbb{Q}^\times \}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}$$ とおく。

一方、Dを例1の通りとし、

$G' = \{ g \in M_2(D) \ ; \ g\,{}^t\bar{g} = n(g) 1_2 \}$ とおく。

ここで ‾ は canonical involution of D である。

さて、$v \neq p, \infty$ に対して $G_v \cong G'_v \cong GSp(2, \mathbb{Q}_v)$ であり、

$U_v = GSp(2, \mathbb{Z}_v)$ とおく。問題は U_p, U'_p の選択である。

今、暫定的に、$U'_p = GL_2(\mathcal{O}_p) \cap G'_p$ とおいておくと、

main term は $(p-1)(p^2+1)\,\mathrm{vol}(\mathfrak{H}_2/Sp(2,\mathbb{Z}))$ であることがわかる。($\mathfrak{H}_2$ は degree 2 の Siegel 上半空間) 一方で、

$GSp(2,\mathbb{Z})$ の subgroup として $\Gamma_0(p)$ に似ているものを考えてみると、次の2つしかない。(記号を流用して)

本質的に

$$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{Z}) \ ; \ C \equiv 0 \bmod p \right\}$$

$$\Gamma'_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ a & * & * & * \\ b & c & * & d \\ e & * & * & * \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{Z}) \ ; \ a, b, c, d, e \equiv 0 \bmod p \right\}$$

これらの $Sp(2,\mathbb{Z})$ に対する index は共に $(p+1)(p^2+1)$ である。このズレはどうすれば説明できるのであろうか。ここに致って(例1)で何故 $\Gamma_0(p)$ が「よい群」として登場したのかを反省する必要が生じたのだった。

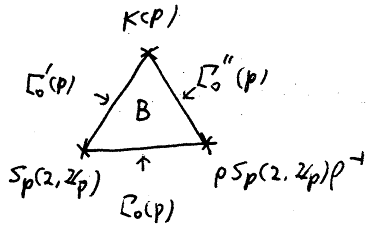
1つの答として、次のような考え方がある。

今、問題は local だから、G_p と G'_p のコンパクト部分群

のうちでなるべく standard なものをとりたいのだが、Bruhat-Tits, Iwahori-Matsumoto 等の理論より、p-adic な reductive 代数群は、共役を除いて唯1つ minimal parahoric subgroup と呼ばれる群を含んでいる。(大雑把に言って、これは、mod. p すると Borel subgp になる群のことである。)
たとえば、(例1)では、U_p, U_p' はたしかに minimal parahoric である。(例2) においても、このような群をとるべきなのではないか？ 実は、(例2) においては、Iwahori 部分群 (= split 群の mini. parahoric) は、$\Gamma_0(p)$, $\Gamma_0'(p)$ よりも小さく、

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ a & * & * & * \\ \multicolumn{2}{c}{C} & * & b \\ & & * & * \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z}_p) \ ; \ a, b, C \equiv 0 \bmod p \right\}$$

で与えられるのである。$Sp(2, \mathbb{Q}_p)$ と B の間には群は有限個しかなく、次の絵で与えられる。



$$\rho = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & p & & \\ p & & & \end{pmatrix}$$

絵の意味は、各頂点が maximal compact, 辺は頂点の群の共通部分として得られる。ちなみに、

$$K(p) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & p^{-1}* & * \\ p* & * & * & * \\ p* & p* & * & p* \\ p* & * & * & * \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Q}_p) \ ; \ * \text{ は integer} \right\}$$

であり、これは $Sp(2, \mathbb{Z}_p)$ とは共役ではない。

群の index は、 $[Sp(2,\mathbb{Z}_p):\Gamma_0(p)] = [Sp(2,\mathbb{Z}_p):\Gamma_0'(p)] = (p+1)(p^2+1)$

$[\Gamma_0''(p):B] = [\Gamma_0'(p):B] = [\Gamma_0(p):B] = p+1$,

$[K(p):B] = (p+1)^2$ 等である。

ホモロジー的に

(B の main term) − ($\Gamma_0(p), \Gamma_0'(p), \Gamma_0''(p)$ の main term)

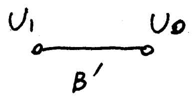
+ ($Sp(2,\mathbb{Z}_p)$, $\rho Sp(2,\mathbb{Z}_p)\rho^{-1}$, $K(p)$ の main term)

を計算すれば、 $vol(\mathfrak{H}_2/Sp(2,\mathbb{Z}))$ でわって

$$(p+1)^2(p^2+1) - 3(p+1)(p^2+1) + 2 + p^2+1 = (p-1)(p^3-1)$$

である。

一方これに応じて、G_p' の方も minimal parahoric をとると、その絵は



$[U_1:B'] = p+1 \qquad U_1 = GL_2(\mathcal{O}_p)\cap G_p'$

$[U_0:B'] = p^2+1$

となっている。この時

$$「B'」-「U_1」-「U_0」 = (p-1)(p^2+1)(p+1) - (p-1)(p^2+1) - (p^2-1)$$
$$= (p-1)(p^3-1)$$

となって、上と一致するのである。

以上のような考えにもとづいて、実際に保型形式の方でL函数が一致するかどうかの実例実験を行ったのが Ibukiyama[5] であって、結果は肯定的証拠を与えたと考えている。

(例3) 一般論への示唆

以上のような考察を一般化して、main term の比較を試みたい。今、はじめから local に考えて、p-adic な代数群 G_p とその $\mathbb{Q}_p$-form G_p' を考えると、この分類表が Tits [11] に与えられている。両者の minimal parahoric subgroup を B, B' とすると、これらを含む群は Bruhat-Tits theory により次のようになる。両者の affine Weyl 群は Coxeter 群であり、その Coxeter system としての generators の集合を S, S' とする。これらは、G_p, G_p' 内に自然な代表をもつ。$\theta \subset S$ として、$\theta = \{s_1, \cdots, s_r\}$ とすれば、

$P_\theta = \langle B s_i B : i = 1 \sim r \rangle$ ではられる群

とおくとき、これが G_p と B の間にある群全体を与える。たとえば $P_S = G_p$, $P_\phi = B$ である。G_p' についても同様である。ここで $n(B) = \#(B \bmod p) = \#(B \otimes \mathbb{F}_p)(\mathbb{F}_p)$, とおく。また、

$$V(G_p) = n(B)^{-1} \sum_{\theta \subsetneq S} \frac{(-1)^{\#(\theta)}}{[P_\theta : B]}$$

とおき、これを "new volume" とでも呼ぼう。G_p' についても全く同様に、$V(G_p')$ を定義する。このとき、

定理 (Ibukiyama[6])

$\nabla(G_p) = \nabla(G_p')$ が次の場合に言える。

G_p'が(Titsの分類表で) ${}^2B_n$ $(n \geqq 3)$, ${}^2B\text{-}C_n$ $(n \geqq 3)$, ${}^2C\text{-}B_m$ $(m \geqq 2)$, ${}^dA_{md-1}$ $(m \geqq 1, d \geqq 2)$, ${}^2C_m$ $(m \geqq 2)$, ${}^2D_n'$ $(n \geqq 4)$, ${}^2D''_{2m}$ $(m \geqq 3)$, ${}^4D_{2m+1}$ $(m \geqq 2)$, ${}^3E_6$, ${}^2E_7$.

たとえばE_7では、VI型対称領域が存在するので、面白いかもしれない。上は$G_p \neq G_p'$の仮定のもとに(勿論)考えているわけだが、上の表に登場しないcaseでも、$G_p \cong G_p'$なら、minimal parahoricをとるという方針の有利さはたとえば古関氏の結果にもみられる通りである。上の表にないものについては、他のprimeで皆同型になるようなG, G'がglobalにはとれないのではないかと考えているが、確かめていない。上記の定理の証明は、MacdonaldのPoincaré polynomialに関する結果を用いる。この文献の読み方等で加藤信一氏にお世話になったことを感謝したい。

ちなみに、C_n型では、main termは、

$$2 \times 1!3!\cdots(2n-1)! \frac{\prod_{i=1}^{n} \zeta(2i)}{(2\pi)^{n(n+1)}} (p-1)(p^3-1)\cdots(p^{2n-1}-1)$$

である。

§2. 次元の比較定理

この節では、$Sp(2,\mathbb{R})$ と $Sp(2)$ の保型形式の次元の比較定理をなるべく手短かに述べてみたい。証明に関する事柄は次節にまわす。G, G' を前節(例2)の通りとする。

保型形式の定義を簡単に復習しておこう。

(i) $Sp(2,\mathbb{R})$

Γ を $Sp(2,\mathbb{R})$ の離散群、k を正整数とする。

$\mathfrak{H}_2 = \{ X + iY \ ;\ X, Y \in M_2(\mathbb{R}),\ X, Y$ は対称行列、Y は正定値$\}$ とおく。

$S_k(\Gamma)$ で $\mathfrak{H}_2$ 上の Γ に関する weight k の cusp forms をあらわす。すなわち、$f \in S_k(\Gamma)$ とは

(イ) f は $\mathfrak{H}_2$ 上で正則、

(ロ) $f(Z)|Y|^{\frac{k}{2}}$ は $\mathfrak{H}_2$ で bounded

(ハ) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して

$$f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = f(Z)\,|CZ+D|^{k}$$

を意味する。

(ii) $Sp(2)$

G'_A に対し open subgroup U' を前節のようにとっておこう。この時、G'_∞ の表現 ρ に対して $\mathfrak{M}_\rho(U')$ で U' に関する weight ρ の保型形式の空間をあらわす。すなわち、ρ の表現空間を

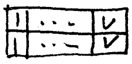
Vとするとき．$f \in \mathfrak{M}_\rho(U')$ とは．

(イ) f は G'_A 上の V-valued function であり

(ロ) 任意の $a \in G'$, $u \in U'$ に対して

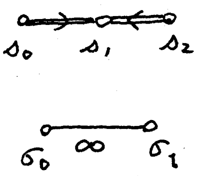
$$f(axu) = \rho(u) f(x)$$

なることを意味する。ここで $\rho(u)$ は $u \in G'_A$ を G'_∞ に射影して ρ をつなげたものとする。特に ρ が $Sp(2)$ の既約表現

 (Young diagram) に対応するとき，$\mathfrak{M}_\rho(U') = \mathfrak{M}_\nu(U')$ と書くことにする。実際には V は球函数、つまりある種の調和多項式で書けるので，かなり具体的な対象である。

さて，G_p に対して $S = \{s_0, s_1, s_2\}$，G'_p に対して $S' = \{\sigma_0, \sigma_1\}$ と affine Weyl 群の generators をとっておく。

Dynkin diagram
(extended)



G_p

G'_p

$\theta \subset S$ に対して P_θ を前節例3のように定め，$U_\theta = G_\infty P_\infty \prod_{v \neq p, \infty} U_v$ とする。$\theta = \{s_1, s_2\}$ なら $U_\theta = U_{12}$ などのように略して書こう。G'_p, U' 等についても全く同様に記号を定める。前節の記号で言えば，$P_{12} = Sp(2, \mathbb{Z}_p)$，$P_{01} = \rho\, Sp(2, \mathbb{Z}_p) \rho^{-1}$，$P_{02} = K(p)$，$P_1 = \Gamma_0(p)$，$P_2 = \Gamma_0'(p)$，$P_\phi = B$ 等である。

P_0 は．

$$\left\{ \begin{pmatrix} * & * & p^{-1}* & * \\ p* & * & * & * \\ p* & p* & * & p* \\ p* & p* & * & * \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Q}_p) \; ; \; * \text{ は integer} \right\}$$

で与えられる。 $\Gamma_\theta = U_\theta \cap Sp(2, \mathbb{Q})$ とおけばこれは．$Sp(2, \mathbb{R})$ の離散群であって．$S_k(\Gamma_\theta)$ のことを $S_k(U_\theta)$ とも書くことにする。

G_p' については B', P_0' がまだ説明していなかった。G_p' の「内積」をとりかえておけば．G_p' は次の G_p^* と同型である。

$$G_p^* = \left\{ g \in M_2(D_p) \; ; \; g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {}^t\bar{g} = n(g) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, n(g) \in \mathbb{Q}_p^\times \right\}.$$

この中で考えて．π を $\mathcal{O}_p$ の素元として．

$$B' = G_p^* \cap \begin{pmatrix} \mathcal{O}_p , & \mathcal{O}_p \\ \pi\mathcal{O}_p , & \mathcal{O}_p \end{pmatrix}^\times$$

$$P_0' = G_p^* \cap \begin{pmatrix} \mathcal{O}_p , & \pi^{-1}\mathcal{O}_p \\ \pi\mathcal{O}_p , & \mathcal{O}_p \end{pmatrix}^\times$$

としてよい。これらの設定のもとで．次元の交代和の比較をするのが我々の定理である。

主定理 (Hashimoto-Ibukiyama [4])

3以外の任意の素数 p と $k \geqq 5$ なる正整数 k に対して、次の等式がなりたつ。(記号は前述の通りとして)

$$\dim S_k(B) - \dim S_k(U_0) - \dim S_k(U_1) - \dim S_k(U_2)$$

$$+ \dim S_k(U_{01}) + \dim S_k(U_{02}) + \dim S_k(U_{12})$$

$$= \dim \mathfrak{M}_{k-3}(B') - \dim \mathfrak{M}_{k-3}(U_0') - \dim \mathfrak{M}_{k-3}(U_1')$$

但し、U_ϕ, U_ϕ' を記号を流用してそれぞれ B, B' と書いた。

(注意) 上で $p \neq 3$ は、計算を簡略化するための便宜的な仮定である。よって本質的に、除外できるべき仮定のはずである。一方 $k \geqq 5$ は、trace formula の収束条件よりくる仮定で実際には $k \geqq 3$ までおちてほしい所である。

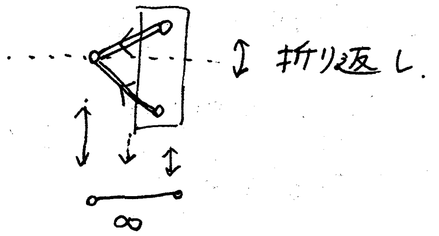
この定理、及び若干の数値実験例より、多少の予想を述べるのは許されるであろう。今 $S_k^\circ(B)$ で、$S_k(U_0)+S_k(U_1)+S_k(U_2)$ の $S_k(B)$ 内での(通常の Petesson 内積に関する)直交補空間をあらわし、$\mathfrak{M}_{k-3}^\circ(B')$ で $\mathfrak{M}_{k-3}(U_0')+\mathfrak{M}_{k-3}(U_1')$ の $\mathfrak{M}_{k-3}(B')$ 内での直交補空間をあらわすことにする。
$v \neq p, \infty$ では $G_v \cong G_v'$ だから、通常の(classical な)

Hecke環は bad prime p 以外では同型である。つまり, $\{T(n)\ ;\ p\nmid n\}$ が $S_k^\circ(B)$ と $\mathfrak{M}_{k-3}^\circ(B')$ に作用している。

<u>予想</u>　$\mathfrak{M}_{k-3}^\circ(B')$ から $S_k^\circ(B)$ への線型同型写像で, すべての $T(n)$ $(p\nmid n)$ の作用と可換なものが存在する。

この予想を§1.(例3) のような発想でより一般的に述べるのは簡単であるが, 今は省略しておく。

以上では, もっぱら <u>minimal</u> parahoric について話を進めてきたわけであるが, 中間の parahoric (つまり minimal parahoric を含む群) についても多少面白い結果がある。今, G_p' の (extended) Dynkin diagram は G_p のそれの "folding" で得られていて, コンパクト群どおしは, この "folding" で「対応」がある。



今の場合で言えば, B と B', P_{02} と P_0', P_1 と P_1' がその「対応」の組である。よって, 後の2つに対しても

保型形式の対応を期待するのは自然ではないかと思われる。実際、次の等式が成立する。

定理 (Ibukiyama [7])

任意の素数 p と、$k \geqq 5$ なる整数に対して、

$$\dim S_k(U_{02}) - 2\dim S_k(Sp(2,\mathbb{Z}))$$

$$= \dim \mathfrak{M}_{k-3}(U_0') - (\dim A_2(\Gamma_0^{(1)}(p))) \times (\dim S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z})))$$

である。

但し、$\Gamma_0^{(1)}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})\ ;\ c \equiv 0 \bmod p \right\}$ であり、$A_2(\Gamma_0^{(1)}(p))$ は $\Gamma_0^{(1)}(p)$ に属する weight 2 の保型形式 (cusp form とは限らない) の空間である。

上述の定理に対して、ある程度、解釈を与えて予想を述べることもできるが、詳しくは論文を参照されたい。ここでは少しだけポイントを述べるにとどめる。

(1) もともと $U_{02} \cap Sp(2,\mathbb{Q})$ と $Sp(2,\mathbb{Z})$ は互いに何の包含関係も (たとえ共役でうつしても) 存在しない。にもかかわらず、式からみて $S_k(Sp(2,\mathbb{Z}))$ が "old form" であるべきなのは、$S_k(Sp(2,\mathbb{Z})) \subset S_k(B) \xrightarrow[\text{trace}]{} S_k(U_{02})$ なる写像で説明されるであろう。

(2) $\mathfrak{M}_{k-3}(U_0')$ についても、$\mathfrak{M}_{k-3}(U_1')$ から old form が（trace を通じて）あらわれ、これがたまたま1変数の form の pair からの "Ihara lifting" と一致してしまうのであろう。（U_0' と U_1' に包含関係がないのは前と同様）

本来、このような「解釈」などは、local な表現論が皆すっきりとわかったあかつきには、皆必要なくなるのかもしれないが、今の所「古典的」かつ「global」が先行して、それなりの面白さ（当面の一時的なメリット）もでている段階と言えるのではないかと思われる。（ちなみに、minimal parahoric では、new form = Steinberg rep.（いわゆる special）だが、中間 parahoric では、local な表現は、一種類ではない。）

§3. 次元公式の計算

まず次のことを一応定理と書いておこう。

<u>定理</u>　§2. 主定理の両辺に現われるすべての次元は、完全に explicit な式で書ける。

非常に一般的保型形式の対応予想の証明においては、次元を計算しつくすといった事は、およそ期待できないから、かなり理論的にならざるを得ないはずである。一方で「比較」はできても explicit な「計算」はできないかも知れない。この意味で上の「定理」は、我々の知識のメリットと限界を同時にあらわしている。（我々には「理論」はまだない。）

さて、次元の計算は、一般に代数幾何によるものと、Selberg trace formula によるものがあるが、我々の用いたのは、後者である。以下ポイントを解説したい。

degree 2 の Siegel modular form の次元について、Morita, Christian の公式があり、一般の degree では、故新谷先生の研究があった。これらは皆、unipotent 共役類の寄与に関する研究であった。Selberg trace formula による $S_k(\Gamma)$ の公式というのは、Γ の元を、Γ-共役類に分類して、その

それぞれに付随した積分　の和で $\dim S_k(\Gamma)$ を書くというものである。Γ を主合同部分群等とすれば、unipotent と単位元以外の寄与は皆消えて、単位元からは main term (volume) が、unipotent からは、概均質ベクトル空間のゼータ函数の特殊値があらわれる（かつ計算が degree 2 ではできる）というのが上述の研究で知られていることであった。ところで、我々の考えるべき群は、より大きく、たとえば torsion elements をたくさん含んでいるので、これだけでは不十分であった。我々は、Siegel modular 以前に、compact form $Sp(2)$ を研究した。($Sp(2) = Sp(2,\mathbb{C}) \cap U(4)$)　$Sp(2)$ は compact 群であるから その元はすべて semi-simple であり、上述の unipotent のいわば対極にあたる。ここでの「weight 0」の保型形式の次元は、「4元数的エルミート形式」の類数にあたる。このような定符号形式の類数に関する研究は、たとえば5変数定値2次形式の類数に関する浅井照明氏の研究があった。（我々はうかつにして、実は、計算を終えるまで、このことに気づいていなかったのだが。）さて、「Γ-共役類」という概念は、なかなか面倒であって、たとえば、Hasse principle などはたいていはなりたたない。つまり、各 local に U_v-共役 でも、global には、そうでない。しかし、local な計算で話がすむようにできれば、それにこしたことはないので、次のような

事を考えるとよいであろう。

1) G'の共役類を分類する。

2) G'_A-共役類の中に上をうめこむ。これは injective である。

(Hasse principle)

3.) 上のうめこみの image をうまく書く。(global-local の link)

4.) G'_v-共役類を U'_v-共役類にわけなおす。

5.) 4) の寄与と global な volume で、全体の寄与を書く。

このような方針は、浅井氏により使われていたし、また、

2) は土方先生の結果である。

それはともかく、このような原則のみやすい公式化は、次で得られる。

<u>定理</u> (Hashimoto [1])

$$\dim \mathfrak{M}_0(U) = \sum_{C(g)} \sum_{L_G(\Lambda)} M_G(\Lambda) \prod_{v<\infty} c_v(g, R, \Lambda_v)$$

この公式の詳しい解説は省略したいが、Λ は $\mathbb{Q}(g)$ の commutor algebra の order, $M_G(\Lambda)$ は 5) で言う volume, c_v は 4) の部分にあたり、$C(g)$ は G'-共役類である。(群を一般にし、twisted trace formula などにしても同様の表示になる。)

"weight 0" ではなく "weight ρ" で次元を計算するには、前公式の $\prod c_v$ の所に、C_∞-part とでもいうべき $\mathrm{tr}\,\rho(g)$ をつけ加えればよいだけである。

以上は、勿論 explicit な公式ではないので、次元を具体的に計算しようとすると実際にはかなり面倒な手続が必要となる。たとえば、前述の1), 3) をきちんと実行しなくてはならないし、とりわけ $c_v(g, R, \Lambda_v)$ の計算には、苦労が多かった。ともかくも

<u>定理</u> (Hashimoto - Ibukiyama [3])

$\dim \mathfrak{M}_\nu(U_1')$, $\dim \mathfrak{M}_\nu(U_0')$, $\dim \mathfrak{M}_\nu(B')$ は explicit に計算される。

さて、ここで話を Siegel modular に転じよう。Siegel modular では、群の元は、semi-simple 以外にもさまざまであるが、まず

(1.) semi-simple 共役類について

G' については、寄与の計算において、global な量は一応 $M_G(\Lambda)$ だけであって、前述の 3) さえやれば、local な計算でほぼすんでしまう所が大変に都合がよかった。この原則は、実は $Sp(2, \mathbb{R})$ においても全く同様なのである。そして、「$\mathrm{tr}\,\rho(g)$」にあたる C_∞-part が、real な群上の積分と

してあらわれるのである。この部分の計算は、gが regular element ならはっきり知られていた。それ以外については、面倒な計算の後、Hashimoto [2] で得られた。なお、C_∞ については、Langlands [9] にもある程度書かれているがミスプリもあり、またあまり明瞭とは言えなかった。[2]で当初、C_∞は、主に留数計算の反復で得られたが、現在では orbital integral に関する Harish-Chandra 式 limit formula を 証明することにより、計算が簡易化された。

さて、C_v の方については、$G_v \cong G'_v$ $(v \neq p, \infty)$ より、実は、G' に対する量と実は同じであって、$v = p$ 以外では計算しなおす必要が全然ないというまい状態になっている。勿論、一般には C_p（つまり$v=p$）での計算はそれなりに面倒であるし、global-local の link のまとめ方もかなりちがってはくるのだが、（つまり、たとえば次元の比較は local な問題ではないのだが）、Siegel modular への寄与の計算はかなり簡易化されたと言える。degree 2 では、「Γ-共役類」の情報もかなりはっきりしているので、実際計算としては、C_v etc でも「Γ-共役類」でもどちらでもできる。また、local theory の方から出発して Γ-共役類の分類に逆に到達することも（少くとも原理的には）可能である。

(2) unipotent 的な共役類について.

前にも述べたように. unipotent 共役類には. 概均質ベクトル空間のゼータ函数の特殊値があらわれる。我々の群では. (torsion) × (unipotent) のような形の共役類もあらわれ. これらについては寄与の計算は知られていなかったが、面倒な計算の結果. やはり同様であることがわかった。(Hashimoto [2])

さて. これらの寄与を local な量に帰着する方法は今の所. わかっていない。上のようなゼータ函数は. リーマンゼータのような特殊な場合を除き. Euler 積に分解しないのであるから. むしろこれらは. 本質的に global と考えるのが妥当かもしれない。

それはともかく. semi-simple と非常に異なった点が1つある。semi-simple では.「1つの」共役類の寄与を問題にしえたが. 今の場合. Γ-共役類の「うまい集合」をまとめないと. 寄与がかけないのである。うまくゼータがでてくるまとめ方として. "family" なる概念が導入された。(Hashimoto [2])

ここでは詳しくは述べないが. 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して. γ の $Sp(2,\mathbb{R})$ 内での centralizer のうまい subgroup $C_0(\gamma, Sp(2,\mathbb{R}))$ を指定して.

1) $C_0(\gamma, Sp(2,\mathbb{R}))$ が一致　かつ

2) γ の Jordan 分解による semi-simple part の一致

を条件としてひとまとめにしたのが family である。
たとえば $\gamma = \begin{pmatrix} 1_2 & S \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$, $S = {}^tS > 0$ に対しては

$$C_0(\gamma, Sp(2, \mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} 1_2, & X \\ 0, & 1_2 \end{pmatrix} ; X = {}^tX \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$$ と

指定する等々。
このようなまとめ方によって、寄与の積分が、$C_0(\gamma, Sp(2,\mathbb{R})) \cap \Gamma$ の $C(\gamma, \Gamma)$（Γ 内での centralizer）に対する index 等で explicit に書ききってしまえるのである。
以上、まとめて、

<u>定理</u>（Hashimoto [2]）

degree 2 の Siegel modular form の次元公式における「解析的」部分は皆わかる。

ここで「解析的」というのは、(1) で言えば C_∞-part と言うことであり (2) では、ゼータ函数のあらわれ方と特殊値の計算法ということである。対する「算術的」部分は、(1) で言えば、主に C_v ($v \neq \infty$) の計算であり、(2) で言えば Γ-共役類の分類と volume の計算等である。これらを具体的に計算することにより、explicit formula が得られる。

具体的な（主定理の左辺の）次元公式は、次の論文を参照されたい。

$Sp(2,\mathbb{Z})$, $U_1 = \Gamma_0(p)$ … Hashimoto [2]

$U_{02} \Leftarrow K(p)$ … Ibukiyama [7]

U_0, U_2, B … Hashimoto-Ibukiyama [4]

なお、「算術的」部分の実行はそれなりに面倒で時間がかかるし（我々は $p=3$ をさぼってしまった！）、また計算の「アルゴリズム」があるわけでもないが、技術的な経験則から言えば、degree 2 の Siegel modular の次元公式は、だいたいにおいて何とかなる対象と言っても、それ程言いすぎでもないのではないかと思う。(e.g. Hashimoto [2](II))

§4. Stable conjugacy class

最後に1つ注意を述べておきたい。今 G, G' は $\otimes\mathbb{C}$ すると共に $GSp(2,\mathbb{C})$ になる。従って、G, G' の元は、$GSp(2,\mathbb{C})$ にうめこめる。さて、G 共役類のうち、$GSp(2,\mathbb{C})$ 内では共役になってしまうものをひとまとめにして stable conjugacy class と呼ぼう。G' についても同様。この時、$GSp(2,\mathbb{C})$ 共役類としては同じになる G の stable conj. class と G' の stable conj. class の寄与（次元 or trace への）は、一致するのではないかという Langlands の予想がある。我々は、勿論共役類ごとに計算したのだから、これを確かめるのは容易であり、実際

定理　§2. 主定理の両辺は、各 stable conjugacy ごとに等しい。特に、左辺への torsion element 以外の寄与は0である。

（注意）U_{02} と U_0' の比較（§2. のもう1つの定理）においてはこのようなことは成り立たず、複雑である。これは、local な admissible rep. の種類の複雑さに帰因するものであろう。Langlands の予想には勿論抵触しない。

文献 (詳しくは [4] の reference を参照されたい。)

[1] K. Hashimoto, On Brandt matrices associated with the positive definite quaternion hermitian forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27 (1980)

[2] K. Hashimoto, The dimension of the space of cusp forms on Siegel upper half plane of degree two (I) J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 30 (1983), (II) Math. Ann. 266 (1984)

[3] K. Hashimoto & T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (I) J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27 (1980), (II) ibid. 28 (1982), (III) ibid. 30 (1984)

[4] K. Hashimoto & T. Ibukiyama, On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2,\mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (II), to appear

[5] T. Ibukiyama, On symplectic Euler factors of genus two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 30 (1984), Resumé: Proc. Japan Acad. 57 (1981)

[6] T. Ibukiyama, On automorphic forms of $Sp(2,\mathbb{R})$ and its compact form $Sp(2)$ Semi. Delange-Pisot-Poitou 1982/83

[7.] T. Ibukiyama, On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2,\mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (I), to appear

[8.] Y. Ihara, On certain arithmetical Dirichlet series J. Math. Soc. Japan 16 (1964)

[9] R. P. Langlands, Dimension of spaces of automorphic forms, Amer. J. Math. 85 (1963)

[10] R. P. Langlands, Problems in the theory of automorphic forms Lecture Notes in Math 170, Springer (1970)

[11] J. Tits, Reductive groups over local fields Proc. Symp. Pure Math. XXXIII (1979)